Curso de Mécanica Teórica, Tarea transformada de Bogoliubov - Parte 2

Dionicio Alberto Pérez-Landero

September 13, 2020

Dado el siguiente hamiltoniano

$$H = \alpha_1 a_1 a_1^* + \beta_1(a_1 a_1 + a_1 * a_1 *) + \alpha_2 a_2 a_2^* + \beta_2(a_2 a_2 + a_2^* a_2^*) + \gamma(a_1 a_2 + a_1 a_2^* + a_1^* a_2 + a_1^* a_2^*) \tag{1}$$

- Describir el problema de eigenvalores usando la ecuación maestra

$$U\frac{\partial H}{\partial a} - V\frac{\partial H}{\partial a^*} = \lambda(Va + Ua^*) \tag{2}$$

- Posteriormente, encontrar las eigenfrecuencias
- Para el caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$ encontrar de manera completa las matrices U y V.

Iniciamos con el primer problema, primero represantamos la ecuacion 2 de forma matricial

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a_1} \\ \frac{\partial H}{\partial a_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial H}{\partial a_2^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} \right) \tag{3}$$

El resultado de las operaciones es un vector columna de dos componentes, tomando el primer componente obtenemos

$$u_{11}\frac{\partial H}{\partial a_1} + u_{12}\frac{\partial H}{\partial a_2} - v_{11}\frac{\partial H}{\partial a_1^*} + v_{12}\frac{\partial H}{\partial a_2^*} = \lambda_1(v_{11}a_1 + v_{12}a_2 + u_{11}a_1^* u_{12}a_2^*) \tag{4}$$

Ahora, procemos a calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = \alpha_1 a_1^* + 2\beta_1 a_1 + \gamma a_2 + \gamma a_2^* \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} = \alpha_2 a_2^* + 2\beta_2 a_2 + \gamma a_1 + \gamma a_1^* \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_1^*} = \alpha_1 a_1 + 2\beta_1 a_1^* + \gamma a_2 + \gamma a_2^* \tag{7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_2^*} = \alpha_2 a_2 + 2\beta_2 a_2^* + \gamma a_1 + \gamma a_1^* \tag{8}$$

Ahora, sustituimos las ecuaciones anteriores en la ecuación (4)

$$
\begin{aligned}
&u_{11}\left(\alpha_1 a_1^* + 2\beta_1 a_1 + \gamma a_2 + \gamma a_2^*\right) + u_{12}\left(\alpha_2 a_2^* + 2\beta_2 a_2 + \gamma a_1 + \gamma a_1^*\right)\\
&-v_{11}\left(\alpha_1 a_1 + 2\beta_1 a_1^* + \gamma a_2 + \gamma a_2^*\right) - v_{12}\left(\alpha_2 a_2 + 2\beta_2 a_2^* + \gamma a_1 + \gamma a_1^*\right)\\
&= \lambda_1 v_{11} a_1 + \lambda_1 v_{12} a_2 + \lambda_1 u_{11} a_1^* + \lambda_1 u_{12} a_2^*
\end{aligned} \tag{9}
$$

Posteriomente factorizamos las a y a^*

$$
\begin{aligned}
&a_1\left(u_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma - v_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma\right) + a_2\left(u_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma - v_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma\right)\\
&a_1^*\left(-v_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma + u_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma\right) + a_2^*\left(-v_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma + u_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma\right)\\
&= \lambda_1 v_{11} a_1 + \lambda_1 v_{12} a_2 + \lambda_1 u_{11} a_1^* + \lambda_1 u_{12} a_2^*
\end{aligned} \tag{10}
$$

Esta ecuación debe cumplirse para todas las a, lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
a_1\left(u_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma - v_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma\right) & = & \lambda_1 v_{11} a_1\\
a_2\left(u_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma - v_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma\right) & = & \lambda_1 v_{12} a_2\\
a_1^*\left(-v_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma + u_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma\right) & = & \lambda_1 u_{11} a_1^*\\
a_2^*\left(-v_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma + u_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma\right) & = & \lambda_1 u_{12} a_2^*
\end{array}
\right. \tag{11}
$$

Elimando las a de las ecuaciones y reacomodando, obtenemos

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
-v_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma + u_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma & = & \lambda_1 u_{11}\\
-v_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma + u_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma & = & \lambda_1 u_{12}\\
u_{11}2\beta_1 + u_{12}\gamma - v_{11}\alpha_1 - v_{12}\gamma & = & \lambda_1 v_{11}\\
u_{12}2\beta_2 + u_{11}\gamma - v_{12}\alpha_2 - v_{11}\gamma & = & \lambda_1 v_{12}
\end{array}
\right. \tag{12}
$$

Lo anterior se puede expresar de forma matricial de la siguiente manera

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_1 & \gamma & -2\beta_1 & -\gamma\\
\gamma & \alpha_2 & -\gamma & -2\beta_2\\
2\beta_1 & \gamma & -\alpha_1 & -\gamma\\
\gamma & 2\beta_2 & -\gamma & -\alpha_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_{11}\\ u_{12}\\ v_{11}\\ v_{12} \end{pmatrix}
= \lambda_1
\begin{pmatrix} u_{11}\\ u_{12}\\ v_{11}\\ v_{12} \end{pmatrix} \tag{13}
$$

Siendo este un problema de eigenvalores, para resolverlo he hecho uso de Wolfram Alpha, dando como solución al problema de eigenvalores

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 \;=\; &\Big\{-\tfrac{1}{2}\Big[\left(-\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + 4\beta_1^2 + 4\beta_2^2\right)^2 - 4\left(\alpha_1^2\alpha_2^2 - 4\alpha_1^2\beta_2^2 - 4\alpha_1\alpha_2\gamma^2 + 8\alpha_1\beta_2\gamma^2\right.\\
&\left.-4\alpha_2^2\beta_1^2 + 8\alpha_2\beta_1\gamma^2 + 16\beta_1^2\beta_2^2 - 16\beta_1\beta_2\gamma^2\right)\Big]^{1/2} + \frac{\alpha_1^2}{2} + \frac{\alpha_2^2}{2} - 2\beta_1^2 - 2\beta_2^2\Big\}^{1/2}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Estableciendo las condicones en particular $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ y $\gamma = -\frac{1}{2}$ obtenemos el valor propio

$$
\lambda_1 = \sqrt{2} \tag{15}
$$

Por lo tanto, la eigenfrecuencia es

$$
\Omega = \sqrt{2}\omega_0 \tag{16}
$$

Habiendo encontrado el valor propio, procedemos a calcular los coeficientes de las matrices U y V, teniendo para el caso particular que estamos viendo, la siguiente matriz.

$$
\begin{pmatrix}
1-\sqrt{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\
-\frac{1}{2} & 1-\sqrt{2} & \frac{1}{2} & 0\\
0 & -\frac{1}{2} & -1-\sqrt{2} & \frac{1}{2}\\
-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1-\sqrt{2}
\end{pmatrix} \tag{17}
$$

Reduciendo la matriz con Gauss Jordan obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3+2\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & -3-2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Con lo que podemos concluir lo siguiente tomando $v_{12} = 1$

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Ahora, debemos normalizar el vector, pero esta normalizacion esta dada por el problema.

$$\begin{gathered} u_{11}^2 + u_{12}^2 - v_{11}^2 - v_{12}^2 = 1 \\ (A(-3-2\sqrt{2}))^2 + (A(3+2\sqrt{2}))^2 - (-A)^2 - (A)^2 = 1 \end{gathered} \tag{20}$$

Dando como resultado

$$A = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \tag{21}$$

Teniendo finalmente que

$$\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Tenemos la mitad los valores de las matrices U y V, para resolver lo siguiente tomamos ahora la los segundos terminos, es decir, debemos repetir todo el proceso tomando el componente $_{2,1}$ de la *"Master equation"*, pero a medida que vamos resolviendo el problema vemos que en este caso son identicos, con el mismo valor propio y dando tambien lo siguiente

Teniendo finalmente que

$$\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{32 - 24\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Finalmente, las matrices U y V son

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -3-2\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \\ -3-2\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$